Autômatos com peso e autômatos probabilísticos

Douglas de Araujo Smigly

Faculdade de Tecnologia Termomecanica
Universidade de São Paulo

10 de setembro de 2018

Conteúdo

Conteúdo

Autômatos com peso

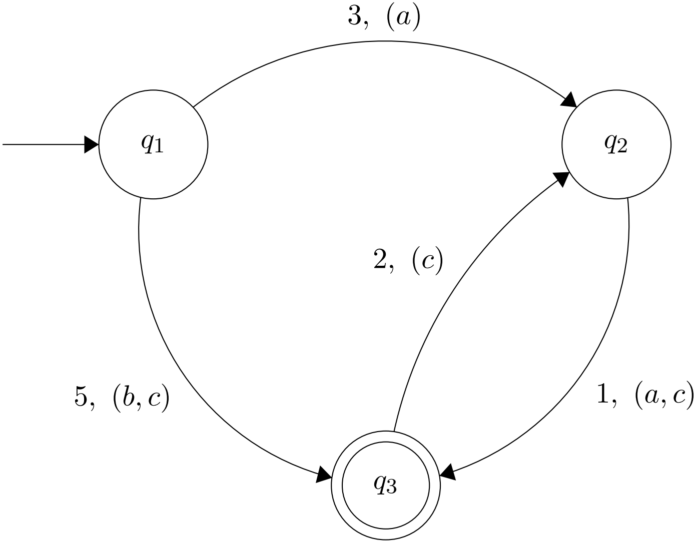
Um Autômato $\mathcal{A}$ com pesos em K é uma quíntupla (Q, E, A, I, T) em que:

- Q é um conjunto finito de estados;
- E é uma função $E\colon Q \times A \times Q \to K$;
- A é um alfabeto;
- I é o estado inicial;
- F é um conjunto de estados finais.

Exemplo

Considere o autômato com pesos em $K = \{1, 2, 3, 5\}$
$\mathcal{A} = (Q, E, A, I, T)$, com

- $Q = \{q_1, q_2, q_3\}$;
- $E\colon Q \times A \times Q \to K$, tal que:
  $E(q_1, a, q_2) = 3, E(q_1, b, q_3) = 5, E(q_1, c, q_3) = 5$
  $E(q_2, a, q_3) = 1, E(q_2, c, q_3) = 1, E(q_3, c, q_2) = 2$
  $E = 0,$ caso contrário.
- $A = \{a, b, c\}$;
- $I = q_1$;
- $F = \{q_3\}$;



3, (a)
q_1
q_2
2, (c)
5, (b, c)
1, (a, c)
q_3

Considere a palavra $\omega = bcaca$. Observe que esta é reconhecida pelo autômato, e ela possui o seguinte peso:

$$q_1 \xrightarrow[\text{5, (b,c)}]{} q_3 \xrightarrow[\text{2, (c)}]{} q_2 \xrightarrow[\text{1, (a,c)}]{} q_3 \xrightarrow[\text{2, (c)}]{} q_2 \xrightarrow[\text{1, (a,c)}]{} q_3$$

$$w(\omega) = 5 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \Rightarrow \boxed{w(\omega) = 20}$$

Note que, se uma palavra α não é aceita pelo autômato, então $\boxed{w(\alpha) = 0}$.

Matriz de adjacências

O autômato do nosso exemplo possui a seguinte matriz de adjacências μ para cada letra:

$$\mu(a) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mu(b) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mu(c) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

E podemos considerar $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Veja que

$$w(bcaca) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \mu(b) \cdot \mu(c) \cdot \mu(a) \cdot \mu(c) \cdot \mu(a) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 20$$

Conteúdo

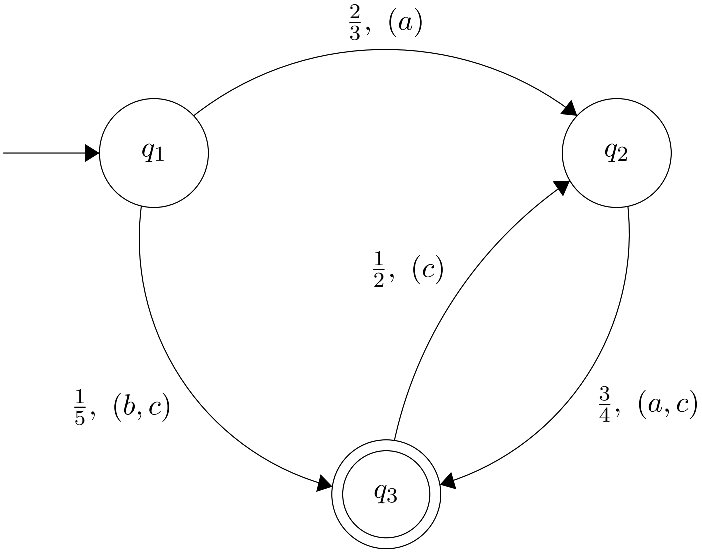
Autômato probabilístico

Um Autômato probabilístico $\mathcal{P}$ é um autômato com pesos em $[0, 1]$. Nesse caso, cada peso é um número que está entre 0 e 1, e representa a *probabilidade* da palavra ser aceita pelo autômato.

Exemplo

Consideremos o mesmo autômato do exemplo anterior, mas agora com pesos entre 0 e 1 :

- $Q = \{q_1, q_2, q_3\}$;
- $E\colon Q \times A \times Q \to K$, tal que:
  $E(q_1, a, q_2) = \frac{1}{3}, E(q_1, b, q_3) = \frac{1}{5}, E(q_1, c, q_3) = \frac{1}{5}$
  $E(q_2, a, q_3) = \frac{1}{4}, E(q_2, c, q_3) = \frac{1}{4}, E(q_3, c, q_2) = \frac{1}{2}$
  $E = 0,$ caso contrário.
- $A = \{a, b, c\}$;
- $I = q_1$;
- $F = \{q_3\}$;



$\frac{2}{3},\ (a)$
q_1
q_2
$\frac{1}{2},\ (c)$
$\frac{1}{5},\ (b, c)$
$\frac{3}{4},\ (a, c)$
q_3

Por exemplo, a palavra $\omega = bcac$ é aceita pelo autômato $\mathcal{P}$, e

$$q_1 \xrightarrow[\frac{1}{5},\ \text{(b,c)}]{} q_3 \xrightarrow[\frac{1}{2},\ \text{(c)}]{} q_2 \xrightarrow[\frac{3}{4},\ \text{(a,c)}]{} q_3 \xrightarrow[\frac{1}{2},\ \text{(c)}]{} q_2$$

$$w(\omega) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{w(\omega) = \frac{3}{80}}$$

Logo, $bcac$ será aceita pelo autômato com uma probabilidade $\frac{3}{80} = 3,75\%$.
Note que, se uma palavra não é aceita pelo autômato, então a palavra tem probabilidade 0 de ser aceita.

Matrizes estocásticas

As matrizes de adjacências para um autômato probabilístico também recebem o nome de matrizes estocásticas. No caso, temos para cada letra:

$$\mu(a) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mu(b) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mu(c) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

E podemos considerar novamente $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Veja que

$$w(bcac) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \mu(b) \cdot \mu(c) \cdot \mu(a) \cdot \mu(c) \cdot \mu(a) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$I \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}}_{= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{3}{80} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \cdot F =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{3}{80} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{3}{80}$$

Conteúdo

Referências

BERSTEL, J. e REUTENAUER, C. *Noncommutative racional series with applications.* Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 2010

SAKAROVITCH, J. (2009a). *Elements of Automata Theory.* Cambridge University Press, 2009